Tematy pracy kontrolnej z matematyki - 6 PG (2009/2010)

1. Wskaż, które z liczb a, b, c, d, e zapisane w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych mają jednakowe mianowniki

$$a = 0,0(23), \quad b = 0,0(60), \quad c = 23,0(17), \quad d = 0,5(18), \quad e = 7,0(830).$$

2. Pewna firma optyczna zachęca osoby starsze do kupna okularów udzielając zniżki według zasady "wiek = procent zniżki".

   a) Oblicz o ile punktów procentowych mniejsza jest zniżka pani Starszej (lat 64) od zniżki pani Bardziejstarszej (lat 77).

   b) Oblicz o ile procent mniejsza jest zniżka pani Starszej od zniżki pani Bardziejstarszej.

   c) Oblicz o ile procent większa jest zniżka pani Bardziejstarszej od zniżki pani Starszej.

3. Oblicz

   a) $\log_5 0,5 + 2\log_5 20 - 3\log_5 2$.

   b) $\log 0,1^2 + \log^2 0,1$.

4. Rozłóż na czynniki wielomian i znajdź jego pierwiastki

   a) $2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

   b) $x^4 - x^3 - 27x + 27$.

5. Wyznacz taką wartość a, żeby pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - ax^2 - 25x + 25a$ były liczby -5, 3, 5.

6. Wyznacz dziedzinę i uprość wyrażenie

$$\frac{1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{2}{x^2 - 1}.$$

7. W pewnym wielokącie liczba przekątnych jest dwukrotnością liczby jego boków. Wyznacz liczbę boków tego wielokąta.

8. Rozwiąż równania

   a) $(x^2 - 4)^2(x^2 - x - 2) = 0$.

   b) $x^3(x^3 - 10x^2 + 25x) = 0$.

9. Rozwiąż równania

   a) $\frac{x-2}{2} - \frac{x}{4} = 3$.

   b) $x - \frac{4x-5}{3} = \frac{x}{9} - 1$.

10. Podaj wzór funkcji liniowej f wiedząc, że:

    a) do wykresu należą punkty o współrzędnych $(3, -6)$ i $(2, 4)$.

    b) wykres przecina oś x dla $x = 4$, a oś y dla $y = -2$.

11. Zapisz w postaci ogólnej wzór funkcji kwadratowej f wiedząc, że $f(1) = -2$, $f(-1) = -4$, $f(0) = -1$.

12. Punkt P należy do wykresu funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Wyznacz wartość a, jeśli

    a) $P = (4, 81)$,

    b) $P = (-1, 5)$.

13. Sprawdź, czy liczba $b = 110$ jest wyrazem ciągu (a_n), jeśli $a_n = 3n + 6$.

14. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wszystkich wyrazach ujemnych. Wyznacz jego iloraz, jeśli $a_2 = -6$ oraz $a_4 = -54$.

15. Rozwiąż równanie

$$1 + 5 + 9 + \ldots + x = 153.$$

16. Początek układu współrzędnych jest wierzchołkiem kąta α. Jedno ramię kąta pokrywa się z dodatnią częścią osi x, a drugie ramię tego kąta zawiera się w półprostej przechodzącej przez punkt $(10, 4)$. Oblicz $\cos\alpha$ i podaj miarę kąta α.

17. Wiedząc, że $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$ oblicz $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

18. Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ oraz $0° < \alpha < 90°$ oblicz $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ i $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$.

19. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AB. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boku AC w punkcie K i do boku AB w punkcie L oraz $|\sphericalangle AKL| = 50°$. Wyznacz kąty trójkąta ABC.

20. Oblicz o ile procent zwiększyło się pole figury F, jeżeli

    a) F jest kwadratem i długość boku zwiększono o 20%,
    b) F jest równoległobokiem i podstawę skrócono o 15%, a wysokość wydłużono o 30%,
    c) F jest trapezem i każdą z podstaw wydłużono dwukrotnie, a wysokość nie uległa zmianie.

21 W trójkącie równoramiennym ABC $|AC| = |BC| = 4$ oraz $|AB| = 6$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

22. Punkt K jest obrazem punktu P w przesunięciu o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi x i o 5 jednostek w górę wzdłuż osi y. Określ współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty K i P.

23. Prosta l opisana jest równaniem $y = -2x + \sqrt{5}$. Napisz równanie kierunkowe prostej

    a) równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt $(-1, -3)$,
    b) prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $(4, 0)$.

24. Wyznacz współrzędne środka i promień okręgu

$$x^2 + y^2 - 4x - y + 4 = 0.$$

25. Wykaż, że jeżeli w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°, to wysokość graniastosłupa i długość krawędzi podstawy pozostają w stosunku $\sqrt{2} : 1$.

26. Pojemności dwóch pudeł sześciennych różnią się o 91 l. Długości ich krawędzi różnią się o 10 cm. Wyznacz pojemność każdego z pudeł.

27. Dany jest trapez prostokątny $ABCD$, w którym bok AB jest równoległy do boku DC, $|\sphericalangle DAB| = 90°$, $|AB| = 6$, $|DC| = 4$, $|AD| = 2$. Trapez ten obraca się wokół prostej zawierającej bok AB. Wyznacz pole powierzchni powstałej bryły obrotowej.

28. Na campingu znajdują się 2-osobowe i 4-osobowe domki campingowe. W niektórych domkach jest łazienka, a goście z pozostałych domków korzystają z łazienek ogólnodostępnych.

	Łazienka		Razem
	tak	nie	
Domki 2-osobowe	15		
Domki 4-osobowe		23	
Razem	20		50

Uzupełnij dane w tabeli i odpowiedz na pytania.

    a) Jaki odsetek domków 2-osobowych stanowią domki, w których nie ma łazienki?
    b) Jaki odsetek wszystkich domków stanowią domki 4-osobowe?

29. W przestrzeni zdarzeń Ω dane są zdarzenia A, B takie, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ oraz $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Oblicz $P(A \cup B)$.

30. Ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno bez zwracania trzy cyfry i zapisujemy je w kolejności wylosowania otrzymując liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że tak utworzona liczba jest większa od 980 i jest podzielna przez 3.